Concours des 24, 25 et 26 mai 1983 d'admission en 1ère année à l'Institut National des Télécommunications (Options M.P.T.)

MATHEMATIQUES

PROBLEME N°1

On dit que deux matrices A et B permutent ou sont permutables si AB = BA.

Soit $\mathcal{M}_2$ l'anneau des matrices carrées d'ordre 2, définies sur le corps des réels, $\mathbb{R}$.

1°) Si $A \in \mathcal{M}_2$, $\mathcal{A}_A$ étant l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_2$ qui permutent avec A, montrer que $\mathcal{A}_A$ est un anneau.

2°) Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ donnée et $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; déterminer explicitement X. Discuter. Etudier les 2 cas particuliers A diagonale et $\beta = 0$. Si A est inversible, montrer que toute matrice X qui permute avec A permute aussi avec A^{-1}.

3°) Montrer que $\mathcal{A}_A$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dimension et déterminer une base.

4°) Pour quelles matrices A, $\mathcal{A}_A$ est-il commutatif ? A quelle condition sur α, β, γ, δ est-il un corps ?

PROBLEME N°2

Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \forall\, x > 0 \quad g(x) = \sin \frac{1}{x} \\ g(0) = 0 \end{cases}$

On admet que g est intégrable sur tout intervalle de la forme [0, x] et on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$$

On ne tentera pas de trouver explicitement une primitive de g.

1°) Etudier la continuité de f.

2°) Etudier la dérivabilité de f. Pour l'étude en 0, on suggère une intégration par parties basée sur l'égalité : $\sin \frac{1}{t} = (t^2)\left(\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t}\right)$. Il conviendra de justifier soigneusement cette intégration par parties.

3°) On admet l'inégalité suivante, valable pour u réel positif :

$$u - \frac{u^3}{6} \leq \sin u \leq u$$

a - en déduire un encadrement de $f(x) - f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

b - donner une fonction très simple équivalente à f au voisinage de $+\infty$.

.../...

4°) a - Soit : $J_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{(v + n\pi)^2} dv$ pour : $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la convergence de la série de terme général : $(-1)^n J_{n+k}$, k étant un entier strictement positif fixé. Comparer sa somme avec $f(\frac{1}{k\pi})$.

b - Quel est le signe de $f(\frac{1}{k\pi})$?

PROBLEME N°3

On considère, dans le plan $\mathbb{R}^2$, rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle Ω de centre O et de rayon R. Au nombre réel ϕ on associe les points $P(\phi)$ et $Q(\phi)$ du cercle Ω et d'angles polaires variables respectifs $-\phi$ et $+2\phi$:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP(\phi)}) \equiv -\phi \quad (\text{mod } 2\pi)$$

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OQ(\phi)}) \equiv 2\phi \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Soit, d'autre part, $D(\phi)$ la droite qui contient les points $P(\phi)$ et $Q(\phi)$, ou qui est tangente au cercle Ω si ces deux points sont confondus.

1°) Calculer les coordonnées polaires du point $H(\phi)$, milieu du segment $P(\phi)\,Q(\phi)$, et tracer sa trajectoire $\mathcal{H}$ lorsque ϕ varie.

2°) Sur la droite $D(\phi)$, on considère le point $M(\phi)$ défini par :

$$\overrightarrow{P(\phi)\,M(\phi)} = \lambda\, \overrightarrow{P(\phi)\,Q(\phi)}$$

Montrer qu'il existe un nombre réel λ, indépendant de ϕ, tel que la tangente au point $M(\phi)$ à sa trajectoire soit la droite $D(\phi)$.

Dans toute la suite du problème, λ gardera cette valeur : on désigne alors par Γ la trajectoire de $M(\phi)$.

3°) Trouver la longueur L de l'intervalle I, tel que la trajectoire Γ soit décrite entièrement sans répétition lorsque ϕ décrit I. (On pourra chercher la condition nécessaire et suffisante pour que $M(\phi')$ et $M(\phi'')$ coïncident).

4°) Soit $L(\omega)$ la droite issue de l'origine O, d'angle polaire constant $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, la symétrie d'axe $L(\omega)$ change $P(\phi)$ en $p(\phi)$, $Q(\phi)$ en $q(\phi)$ et $M(\phi)$ en $m(\phi)$.

Peut-on choisir la constante $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ de telle manière que $p(\phi) = P(-2\omega - \phi)$ et $q(\phi) = Q(-2\omega - \phi)$ pour tout $\phi \in \mathbb{R}$. La constante ω étant ainsi choisie, que peut-on dire des points $m(\phi)$ et $M(-2\omega - \phi)$? En déduire l'existence, pour Γ, de trois axes de symétrie que l'on précisera.

5°) Tracer la courbe Γ et donner sa longueur.

6°) Trouver les points $A(\phi)$ et $B(\phi)$ où une tangente à Γ en $M(\phi)$ recoupe la courbe. Calculer la distance $A(\phi)\,B(\phi)$.

Montrer que les tangentes à Γ en $A(\phi)$ et $B(\phi)$ sont perpendiculaires et trouver la trajectoire décrite par leur point d'intersection $C(\phi)$ lorsque ϕ varie.